PREPUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
MA-UCM 2011-5

El cálculo fraccionario como instrumento de modelización

L. Váquez and M. P. Velasco

Abril-2011

http://www.mat.ucm.es/deptos/ma
e-mail:matemática_aplicada@mat.ucm.es

EL CÁLCULO FRACCIONARIO COMO INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN

Luis Vázquez[*]; **M. Pilar Velasco**[**]

[*]Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Informática.
Universidad Complutense de Madrid. 28040 Madrid.
lvazquez@fdi.ucm.es

[**]Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Matemáticas.
Universidad Complutense de Madrid. 28040 Madrid.
mvcebrian@mat.ucm.es

Resumen

Se presenta una panorámica de los fundamentos del Cálculo Fraccionario y sus implicaciones para generar nuevos escenarios de modelización metemática. Las nuevas familias de ecuaciones y funciones ofrecen un contexto natural para la modelización de fenómenos asociados a efectos no locales en el espacio y de memoria en el tiempo.

Abstract

We present a panoramic of the foundations of the Fractional Calculus and its implications to generate new scenarios of mathematical modeling. The new families of equations and functions provide a natural context for the modeling of phenomenons associated to non-local effects in the space and of memory in the time.

1. Introducción: Derivadas e Integrales Fraccionarias

Los instrumentos del Cálculo Fraccionario son tan antiguos como el Cálculo mismo. El Cálculo Fraccionario trata del estudio de los llamados operadores de derivación e integración de orden fraccionario sobre dominios reales o complejos y sus aplicaciones. En realidad dichos operadores surgen con el objetivo de generalizar los conceptos de integración y de derivada para valores no enteros, por ello la utilización de los términos "Integración y Diferenciación de Orden Arbitrario" es más apropiado.

El origen del Cálculo Fraccionario se remonta a 1675, momento en el que Leibniz introduce la noción de la derivada de orden n de una función. Fue posteriormente en 1695 cuando los primeros resultados publicados son citados en una carta de L'Hôpital a Leibniz, en la cual L'Hôpital plantea la cuestión del posible significado de la derivada de orden n si $n = 1/2$. La respuesta intuitiva en ese momento de Leibniz fue: "...y esto es una paradoja aparente que permitirá en el futuro extraer consecuencias muy útiles".

A partir de aquí, son muchos los matemáticos que han estudiado este tema y han aportado su contribución al desarrollo de lo que hoy conocemos sobre Cálculo Fraccionario. Entre ellos podemos destacar a Euler, Lagrange, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Grünwald, Letnikov, Holmgren, Cauchy, Hadamard, Hardy, Riesz, Weyl, etc.

Una primera aproximación al concepto de derivada fraccionaria puede realizarse partiendo de la definición clásica de derivada de diferentes órdenes:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} && (1)\\
f''(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \\
&= \lim_{h_1\to 0} \frac{\lim_{h_2\to 0}\frac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2\to 0}\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}}{h_1} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} && (2)\\
\frac{d^n f}{dx^n}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{0\le m\le n}(-1)^m\binom{n}{m} f(x+(n-m)h)}{h^n} && (3)\\
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0\le k\le n && (4)
\end{aligned}
$$

Si consideramos la generalizanción del concepto de factorial mediante la Función Gamma, que analizaremos más adelante en la siguiente sección, obtenemos la defición de derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov:

$$D^q f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^q} \sum_{0\le m<\infty} (-1)^m \binom{q}{m} f(x+(q-m)h) \tag{5}$$

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh) \tag{6}$$

Otra conocida e importante defición de integral y derivada fraccionaria es la de Riemann-Liouville:

- Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville por la izquierda de orden $\alpha > 0$:

$$_aD_x^{-\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\phi(t)dt, \qquad x > a \tag{7}$$

- Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville por la derecha de orden $\alpha < 0$:

$$_xD_b^{-\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1}\phi(t)dt, \qquad x < b \tag{8}$$

- Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville por la izquierda de orden $\alpha > 0$:

$$_aD_x^{\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \int_a^x (x-t)^{\alpha-(n-1)}\phi(t)dt, \qquad x > a \tag{9}$$

- Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville por la derecha de orden $\alpha < 0$:

$$_xD_b^{\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \int_x^b (x-t)^{\alpha-(n-1)}\phi(t)dt, \qquad x < b \tag{10}$$

donde $0 \le n-1 < \alpha < n$.

Relacionada con las integrales de Riemann-Liouville, aparece la definición de derivada fraccionaria de Caputo:

- Derivada Fraccionaria de Caputo por la izquierda de orden $\alpha > 0$:

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_x^\alpha \phi(x) &= {}_a D_x^\alpha \left(\phi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\phi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{\phi^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \qquad x > a
\end{aligned}
\tag{11}
$$

- Derivada Fraccionaria de Caputo por la derecha de orden $\alpha < 0$:

$$
{}_x^C D_b^\alpha \phi(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{\phi^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \qquad x < b \tag{12}
$$

donde $0 \leq n-1 < \alpha < n$ y la función tiene $n+1$ derivadas continuas y acotadas en $[a, b]$.

Una consideración básica relacionada con estos operadores es que permiten introducir de manera natural los términos de memoria. Podemos verlo de una manera muy simple a través del Teorema Fundamental del Cálculo

$$
\frac{dx}{dt} = F(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{13}
$$

que puede escribirse también en forma integral

$$
x(t) = x_0 + \int_0^t 1 \cdot F(\tau) d\tau, \tag{14}
$$

la sustitución del 1 por un núcleo de convolución introduce el término de memoria

$$
x(t) = x_0 + \int_0^t K(t-\tau) \cdot F(\tau) d\tau \tag{15}
$$

y podemos considerar dicha integral como una base para la construcción de posibles definiciones de la integral fraccionaria.

2. Del Factorial a la Función Gamma

La Función Gamma es una función que generaliza la definición del factorial a los números no enteros. Su definición viene dada por:

$$
\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds \tag{16}
$$

para cualquier número complejo z con parte real positiva.

Usando la integración por partes en (16), se obtiene una propiedad fundamental de la Función Gamma:

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) \tag{17}$$

la cual permite obtener la Función Gamma de un número entero positivo como

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{18}$$

En este contexto la Función Gamma constituye una generalización del concepto de factorial.

Si introducimos ahora este concepto en la derivada de una función potencial y estudiamos el caso ordinario y el caso fraccionario con la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, observamos que la generalización fraccionaria puede realizarse formalmente como sigue:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}x^{\mu-\alpha} \tag{19}$$

Muy relacionada con los operadores fraccionarios está la función de Mittag-Leffler, que aparecerá en la solución de muchas ecuaciones diferenciales en las que intervienen los operadores fraccionarios. La función de Mittag-Leffler es una generalización de la función exponencial que fue introducida por el matemático sueco G.M. Mittag-Leffler en 1903

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \qquad (\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}) \tag{20}$$

$$E_1(t) = e^t \tag{21}$$

$$E_2(t) = \cosh(\sqrt{t}) \tag{22}$$

3. Nuevos escenarios matemáticos: nuevas familias de ecuaciones y funciones

El Cálculo Fraccionario presenta una gran cantidad de aplicaciones en diferentes áreas como se muestra en el libro reciente de R. L. Magin en [5]:

"El propósito de este libro es explorar el comportamiento de los sistemas biológicos desde la perspectiva del Cálculo Fraccionario. El Cálculo Fraccionario, la integración y la derivación de orden fractionario o arbitrario, proporciona nuevas herramientas que expanden el poder descriptivo del

cálculo más allá de los conceptos de orden entero familiares de las tasas de cambio y el área bajo una curva."

"El Cálculo Fraccionario aporta nuevas relaciones funcionales y nuevas funciones a la conocida familia de exponenciales y sinusoides que se presenta en el entorno de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias."

Los Fractales y el Cálculo Fraccionario generan parámetros de orden intermedio: dimensiones, orden de integración y diferenciación arbitrarios. Esto ha sido estudiado ampliamente en la literatura ([9], [18]), permitiendo conseguir una mejor modelización en las diferentes aplicaciones.

Como muestra consideremos los siguientes contextos de la Física Clásica, cuyas ecuaciones están basadas en leyes similares:

- Ley de Hooke: $F(t) = kx(t)$
- Fluido de Newton: $F(t) = k\frac{dx}{dt}(t)$
- Segunda ley de Newton: $F(t) = k\frac{d^2x}{dt^2}(t)$
- Otros posibles contextos fraccionarios: $F(t) = k\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}(t)$

Otros contextos son los procesos de difusión que aparecen asociados a la misma ecuación básica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{23}$$

como se muestra en la siguiente tabla:

Ley de	Darcy: $\vec{q} = -K\,\overrightarrow{Grad}\,h$	Fourier: $\vec{Q} = -\kappa\,\overrightarrow{Grad}\,T$	Fick: $\vec{f} = -D\,\overrightarrow{Grad}\,C$	Ohm: $\vec{j} = -\sigma\,\overrightarrow{Grad}\,V$
Flujo de	Agua Subterránea: q	Calor: Q	Soluto: f	Carga: j
Potencial	Carga Hidrostática: h	Temperatura: T	Concentración: C	Voltaje: V
Propiedad del medio	Conductividad Hidráulica: K	Conductividad Térmica: κ	Coeficiente de Difusión: D	Conductividad Eléctrica: σ

Tabla I

La ecuación anterior se puede generalizar mediante los operadores fraccionarios que permiten realizar una interpolación natural entre ecuaciones:

$$\text{Ecuación de difusión (parabólica): } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{24}$$

$$\text{Interpolación: } \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{25}$$

$$\text{Ecuación de ondas (hiperbólica): } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{26}$$

Otro contexto fraccionario asociado al anterior es la utilización de ecuaciones de tipo Dirac fraccionarias de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
A\frac{\partial \psi}{\partial t} + B\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \arrow[r, "A\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial t^\alpha} + B\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0", "\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix}"'] & A\frac{\partial^{1/2} \psi}{\partial t^{1/2}} + B\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \arrow[u, "\begin{matrix} A^2 = I \\ B^2 = I \\ \{A, B\} = 0 \end{matrix}"] \arrow[r, "\gamma = 2\alpha", "\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0"'] & \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

De esta forma, la ecuación

$$A\frac{\partial^{1/2} \psi}{\partial t^{1/2}} + B\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{27}$$

podemos interpretarla como la descripción de dos procesos de difusión acoplados o un proceso de difusión con grados de libertad internos. En ella, cada componente φ y ξ satisface la ecuación estándar de difusión y se les denomina *difunores* en analogía con los *espinores* de la Mecánica Cuántica. Esto proporciona otra forma de estudiar la interpolación entre el operador hiperbólico de la ecuación de ondas y el parabólico de la ecuación de difusión clásica. Según la representación del Algebra de Pauli que verifican A y B, tenemos un sistema de ecuaciones acopladas o no

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \partial_t^\alpha \varphi = \varphi \\ \partial_t^\alpha \xi = -\xi \end{cases} \tag{28}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \partial_t^\alpha \varphi = -\varphi \\ \partial_t^\alpha \xi = -\xi \end{cases} \tag{29}$$

$$A\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial t^\alpha} + B\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\gamma = 2\alpha} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

En el estudio de la inversión temporal ($t \to -t$) se tiene:

- Si $\alpha = 1$ tenemos la ecuación de Dirac y la ecuación de ondas que son invariantes por inversión temporal.
- Si $\alpha = 1/2$ la ecuación clásica de difusión y su raíz cuadrada no son invariantes por inversión temporal.
- Interpolación en: $0 < \alpha < 1$. La invariancia por inversión temporal se cumple para
    - Ecuación Fraccionaria de Dirac: $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, ..., \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{9}, ..., \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11}, ...$
    - Ecuación Fraccionaria de Difusión: $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, ..., \frac{6}{7}, \frac{1}{9}, ...$

En el estudio de la inversión espacio-temporal ($x \to -x$, $t \to -t$) las dos ecuaciones son invariantes por inversión espacial y en la interpolación $0 < \alpha < 1$ la invariancia por inversión espacio-temporal se cumple para los mismos valores de α en las dos ecuaciones:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, ..., \frac{6}{7}, \frac{1}{9}, ...$$

La ecuación fraccionaria de Dirac no es invariante bajo traslaciones temporales debido al carácter no local de la derivada fraccionaria temporal.

Otras ecuaciones diferenciales fraccionarias son obtenidas considerando la raíz 1/3 de las Ecuaciones de Ondas y Difusión:

$$\text{Ecuación de Ondas: } P\partial_t^{2/3}\varphi + Q\partial_x^{2/3}\varphi = 0 \tag{30}$$

$$\text{Ecuación de Difusión: } P\partial_t^{1/3}\varphi + Q\partial_x^{2/3}\varphi = 0 \tag{31}$$

donde

$$P^3 = I \qquad Q^3 = -I \qquad PPQ+PQP+QPP = 0 \qquad QQP+QPQ+PQQ = 0 \tag{32}$$

Una posible realización es en términos de las matrices 3x3 asociadas al *Álgebra de Silvester*:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \Omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

siendo ω una raíz cúbica de la unidad y Ω una raíz cúbica de la unidad negativa. En este caso φ tiene tres componentes.

Como muestra de los problemas matemáticos asociados consideremos el problema General de Cauchy en el espacio $LF = L(R^{+})\mathrm{x}F(R)$ de las funciones para las cuales existen sus transformadas de Laplace y de Fourier.

$$ {}^{C}D_t^{\alpha}u(t,x) - \lambda^{L}D_x^{\beta}u(t,x) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1, \beta > 0 \tag{34} $$
$$ \lim_{x \to \pm\infty} u(t,x) = 0, \quad u(0+,x) = g(x) \tag{35} $$

donde ${}^{C}D_t^{\alpha}$ es La derivada parcial fraccionaria de Caputo, que se define como

$$ D_t^{\alpha}u(t,x) = {}^{C}D_t^{\alpha}u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(\tau,x)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \tag{36} $$

y donde D_x^{β} es la derivada parcial fraccionaria de Riemann-Liouville

$$ D_x^{\beta}u(t,x) = {}^{L}D_x^{\beta}u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \int_{-\infty}^{x} \frac{u(t,z)}{(x-z)^{\beta-m+1}} dz \tag{37} $$

siendo $m = [\beta]$.

La solución del problema de Cauchy viene dada por:

$$ u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) E_{\alpha}(\lambda(-ik)^{\beta} t^{\alpha}) e^{-ikx} dk \tag{38} $$

donde $G(k)$ es la transformada de Fourier de $g(x)$ y E_α es la función de Mittag-Leffler definida en el plano complejo

$$ E_{\alpha}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \tag{39} $$

Por ejemplo para $\beta = 1$ y $g(x) = e^{-\mu|x|}$, $\mu > 0$:

$$ u(t,x) = e^{-\mu|x|} E_{\alpha}(-\mu\lambda t^{\alpha}) \tag{40} $$

Y los momentos de la solución fundamental ($g(x) = \delta(x)$, $G(k) = 1$) para el caso $\beta = 1$ se obtienen de la forma

$$ < x^n >= \int_{-\infty}^{\infty} x^n u(t,x) dx = (-\lambda t^{\alpha})^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{41} $$

4. Fenómenos no locales en el espacio y fenómenos con memoria. Aplicaciones

4.1. No localidad

Hablamos de **no localidad** cuando lo que ocurre en un punto del espacio o en un instante de tiempo depende de un promedio en un intervalo que contiene al punto o al instante. Así, los efectos no locales en el espacio pueden definirse como interacciones de largo alcance (varias escalas de espacio), mientras que los efectos no locales en el tiempo se conocen como efectos con memoria / retraso (varias escalas de tiempo).

Estos fenómenos no locales están asociados a ecuaciones integrales o integrodiferenciales, las cuales aparecen en múltiples contextos:

- Teoría del Potencial: Leyes de Newton y Coulomb del inverso del cuadrado de la distancia.
- Problemas en Geofísica: Mapa tridimensional del interior de la Tierra.
- Problemas en Electricidad y Magnetismo.
- Fenómenos Hereditarios en Física (materiales con memoria: histéresis) y Biología (procesos ecológicos: acumulación de metales).
- Problemas de Evolución de Poblaciones.
- Problemas de Radiación.
- Optimización, Sistemas de Control.
- Teoría de la Comunicación.
- Economía Matemática.

La idea de que diferentes fenómenos físicos puedan ser descritos por ecuaciones diferenciales fraccionarias plantea dos cuestiones fundamentales:

1. *¿Los modelos con derivadas fraccionarias en el espacio y/o en el tiempo son consistentes con las leyes y las simetrías fundamentales de la Naturaleza?.*
2. *¿Cómo puede ser observado experimentalmente el orden fraccionario de diferenciación y cómo emerge una derivada fraccionaria a partir de modelos sin derivadas fraccionarias?.*

En este sentido, las ecuaciones fraccionarias básicas surgen como interpolación entre ecuaciones de la Física Clásica:

$$\text{Ecuación de ondas: } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{42}$$

$$\text{Interpolación: } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \tag{43}$$

$$\text{Ecuación de difusión (parabólica): } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{44}$$

$$\text{Interpolación: } \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{45}$$

$$\text{Ecuación de ondas (hiperbólica): } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{46}$$

Se ha de resaltar que la ecuación de interpolación (45) está de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica si se cumple la condición

$$\frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}} \frac{\partial u}{\partial x} > 0 \tag{47}$$

como ha sido desarrollado en [14].

4.2. Procesos de relajación

Las ecuaciones fraccionarias juegan un papel importante en los procesos de relajación, como son los asociados a los Materiales Viscoelásticos. En ellos, la modelización en el contexto de la mecánica clásica consiste en una combinación de muelles y amortiguadores:

$$\text{Muelles: Ley de Hooke } \sigma(t) = E\varepsilon(t) \tag{48}$$

$$\text{Amortiguadores: Ley del Fluido de Newton } \sigma(t) = \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tag{49}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{Tensión;} && (50)\\ \epsilon &= \text{Deformación;} && (51)\\ E &= \text{Constante elástica o Módulo de Young;} && (52)\\ \nu &= \text{Coeficiente de viscosidad} && (53) \end{aligned}$$

De forma que la ecuación constitutiva viene dada por el modelo de Maxwell

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} \tag{54}$$

siendo $\phi(t) = Ee^{-tE/\eta}$ el módulo de relajación, el cual indica cómo varía con el tiempo la tensión por unidad de deformación aplicada.

Entre los límites elástico y viscoso tenemos la interpolación general

$$\sigma(t) = E\tau^{\beta}\frac{d^{\beta}\varepsilon(t)}{dt^{\beta}} \tag{55}$$

El Proceso de Relajación Estándar (Maxwell-Debye) se formula mediante un problema de valor inicial

$$\tau\frac{d\phi(t)}{dt} = -\phi(t), \qquad t > 0, \quad \phi(0) = \phi_0 \tag{56}$$

cuya solución es

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-t/\tau} \tag{57}$$

Otra formulación como partida para la generalización fraccionaria es

$$\phi(t) - \phi_0 = -\tau^{-1}\int_0^t \phi(t')dt' = -\tau^{-1}\frac{d^{-1}\phi(t)}{dt^{-1}} \tag{58}$$

Formalmente

$$\phi(t) - \phi_0 = -\tau^{-\beta}{}_0D_t^{-\beta}\phi(t) \tag{59}$$

siendo ${}_0D_t^{-\beta}$ el operador de Riemann-Liouville.

Existen además desviaciones del Proceso Clásico de Relajación de Maxwell-Debye, que se formulan mediante un problema de valor inicial:

- Decaimiento de Kohlrausch-Williams-Watts (KWW)

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-(t/\tau)^{\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{60}$$

- Ley de Nutting de potencias:

$$\phi(t) = \frac{\phi_0}{(1 + \frac{t}{\tau})^n}, \qquad 0 < n < 1 \tag{61}$$

Estos modelos se usan en procesos de relajación de la deformación en materiales y se han desarrollado multitud de experimentos de transición entre los dos comportamientos. En ellos además cobra especial importancia la propiedad interpolante de la función de Mittag-Leffler

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_k \frac{x^k}{\alpha k + \beta}, \qquad E_{1,1} = e^x \tag{62}$$

La relajación también puede abordarse con un planteamiento como un problema de memoria

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_0^t K(t-\tau)\phi(\tau)d\tau \tag{63}$$

donde el efecto de memoria viene regulado por el kernel que se escoja:

$$K(t) = K_0\delta(t) \quad \rightarrow \quad \phi(t) = \phi_0 e^{-K_0 t} \tag{64}$$

$$K(t) = K_0 \text{ Memoria constante} \quad \rightarrow \quad \phi(t) = \phi_0 \cos(\sqrt{K_0 t}) \tag{65}$$

$$K(t) = K_0 t^{q-2} \quad (0 < q \leq 2) \quad \rightarrow$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\tau^{-q}{}_0D_t^{-q}\phi(t), \quad \tau^{-q} = K_0\Gamma(q-1) \tag{66}$$

con solución en términos de las funciones de Fox.

Una posible aplicación de los modelos no locales es en el estudio de las Aleaciones con Memoria de Forma. Debido a la complejidad muy elevada del enlace entre el comportamiento macroscópico y microscópico, no existen modelos constitutivos realmente fiables y adecuados para la mayoria de las aplicaciones. Los modelos constitutivos conocidos y estudiados en la literatura son los de Tanaka, Liang-Rogers, Brinson y Auricchio. En ellos se emplea una formulación unidimensional y el comportamiento es básicamente función de tres variables: tensión, deformación y temperatura.

Otro contexto de posible aplicación de los modelos fraccionarios es el asociado a la propagación de la radiación solar en las atmósferas planetarias ([17] y [19]-[21]).

5. Agradecimientos

Esta contribución está basada en la presentación de uno de los autores (Luis Vázquez Martínez) en la sesión "Cálculo Fraccionario y Fractales" organizada por el Instituto de España el 13 de Diciembre de 2010 bajo la dirección del Académico Profesor Darío Maravall Casesnoves, a quien agradecemos el apoyo recibido. Agradecemos el soporte parcial del Programa de Creación y Consolidación de Grupos de Investigación UCM-Santander (GR58-08).

Referencias

[1] Baillie R. T. and King M. L. (Eds.), Fractional Differencing and Long Memory Processes, *J. Econometrics* **73** (1996) 1–324.

[2] Bonilla B., Kilbas A. A. and Trujillo J. J., *Cálculo Fraccionario y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias*, Servicio de Publicaciones de la UNED, Madrid, 2003.

[3] Hilfer R. (Ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[4] Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[5] Magin R. L. *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House Publishers, Connecticut 2006.

[6] Oldham K. B. and Spanier J., *The Fractional Calculus: Theoy and Applications, Differentation and Integration of Arnitrary Order*, Academic Press, New York-London 1974.

[7] Pierantozzi T. and Vázquez L., An interpolation between the wave and diffusion equations through the fractional evolution equations Dirac like, *Journal of Mathematical Physics*, **43**, (2005) 113512.

[8] Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[9] Rocco A. and West B. J., Fractional calculus and the evoluction of fractal phenomena, *Physica A* **265** (1999) 535–546.

[10] Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O. I., *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

[11] Vázquez L., Fractional diffusion equation with internal degrees of freedom, *Journal of Computational Mathematics*, **21**, (2003) 491–494.

[12] Vázquez L., Una panorámica del Cálculo Fraccionario y sus aplicaciones, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, **98**, (2004) 17–25.

[13] Vázquez L., A fruitful interplay: From nonlocality to Fractional Calculus, en: Abdullaev F. Kh. and Konotop V. V. (Eds.), *Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects*, Kluwer Academic Publisher, (2004) 129–133.

[14] Vázquez L., Trujillo J. J. and Velasco M. P. Fractional Heat Equation and the Second Law of Thermodynamics, *Journal of Physics A*, (2011) enviado.

[15] Vázquez L. and Usero D. Ecuaciones no locales y modelos fraccionarios, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, **99**, (2005) 203-223.

[16] Vázquez L. and Velasco M. P. Aplicación del cálculo fraccionario a los procesos de relajación, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, **XXXV**, (2009) 105-115.

[17] Vázquez L., Zorzano M. P. and Jiménez S. Spectral information retrieval from integrated broadband photodiode Martian ultraviolet measurements, *Optics Letters*, **32**, (2007) 2596-2598.

[18] West B. J., Bologna M. and Grigolini P., *Physics of Fractal Operators*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[19] Zorzano M. P., Mancho A. M. and Vázquez L. Numerical integration of the discrete-ordinate radiative transfer equation in strongly non-homogeneous media, *Applied Mathematics and Computation*, **164**, (2005) 263-274.

[20] Zorzano M. P. and Vázquez L. Remote temperature retrieval from heating or cooling targets, *Optics Letters*, **31**, (2006) 1420-1422.

[21] Zorzano M. P., Vázquez L. and Jiménez S. Retrieval of ultraviolet spectral irradiance from filtered photodiode measurements, *Inverse Problems*, **25**, (2009) 115023.

PREPUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
MA-UCM 2010

1. CONTINUITY OF DYNAMICAL STRUCTURES FOR NON-AUTONOMOUS EVOLUTION EQUATIONS UNDER SINGULAR PERTURBATIONS, J. Arrieta, A. N. Carvalho, J. Langa and A. Rodríguez-Bernal.

2. ON THE LONG TIME BEHAVIOUR OF NON-AUTONOMOUS LOTKA-VOLTERRA MODELS WITH DIFFUSION VIA THE SUB-SUPER TRA JECTORY METHOD, J.A. Langa, A. Rodríguez-Bernal and A. Suárez.

3. MODELLING AND SIMULATION OF A POLLUTED WATER PUMPING PROCESS, C. Alavani, R. Glowinski, S. Gomez, B.Ivorra, P. Joshi and A. M. Ramos.

4. EXPANDING THE ASYMPTOTIC EXPLOSIVE BOUNDARY BEHAVIOR OF LARGE SOLUTIONS TO A SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION, S. Alarcón, G. Díaz, R. Letelier and J. M. Rey.

5. A SINGULAR PERTURBATION IN A LINEAR PARABOLIC EQUATION WITH TERMS CONCENTRATING ON THE BOUNDARY, A. Rodríguez-Bernal.

6. ISOTHERMALISATION FOR A NON-LOCAL HEAT EQUATION, E. Chasseigne and R. Ferreira.

7. HOMOGENIZATION IN A THIN DOMAIN WITH AN OSCILLATORY BOUNDARY, J. M. Arrieta and M. C. Pereira

8. VERY RAPIDLY VARYING BOUNDARIES IN EQUATIONS WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS. THE CASE OF A NON UNIFORMLY LIPSCHITZ DEFORMATION, J.M. Arrieta and S. Bruschi

9. PERTURBATION OF ANALYTIC SEMIGROUPS IN SCALES OF BANACH SPACES AND APPLICATIONS TO PARABOLIC EQUATIONS WITH LOW REGULARITY DATA, A. Rodríguez-Bernal

10. IDENTIFICATION OF A PRESSURE DEPENDENT HEAT TRANSFER COEFFICIENT, A. Fraguela, J. A. Infante, Á. M. Ramos and J. M. Rey.

11. MATHEMATICAL MODELING FOR PROTEIN FOLDING DEVICES. APPLICATIONS TO HIGH PRESSURE PROCESSING AND MICROFLUIDIC MIXERS, J. Bello Rivas, J. A. Infante, B. Ivorra, J. López Redondo, P. Martínez Ortigosa, A. M. Ramos, J. M. Rey, and N. Smith

12. A VARIANCE-EXPECTED COMPLIANCE APPROACH FOR TOPOLOGY OPTIMIZATION, M. Carrasco, B. Ivorra, R. Lecaros and A. M. Ramos

13. MODELING AND SIMULATION OF CLASSICAL SWINE FEVER VIRUS SPREAD BETWEEN AND WITHIN FARMS, B.Ivorra, B.Martinez-Lopez, J. M. Sanchez-Vizcaino and A.M. Ramos

14. NONLINEAR PARABOLIC PROBLEMS IN THIN DOMAINS WITH A HIGHLY OSCILLATORY BOUNDARY, J. Arrieta, A. C. Carvalho, M. C. Pereira and R. P. Silva.

15. SINGULAR LIMIT FOR A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH TERMS CONCENTRATING ON THE BOUNDARY, A. Jiménez-Casas and A. Rodríguez-Bernal

16. SENSITIVITY ANALYSIS OF A DEFAULT TIME MODEL FOR CREDIT RISK PORTFOLIO MANAGEMENT, R. Abella Muñoz, I. Armero Huertas, B. Ivorra and A. M. Ramos del Olmo

17. OPTIMIZATION OF A PUMPING SHIP TRAJECTORY TO CLEAN OIL CONTAMINATION IN THE OPEN SEA, S. Gómez, B. Ivorra and A. M. Ramos del Olmo

PREPUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
MA-UCM 2011

1. APPROXIMATING TRAVELLING WAVES BY EQUILIBRIA OF NON LOCAL EQUATIONS, J. M. Arrieta, M. López-Fernández and E. Zuazua.

2. INFINITELY MANY STABILITY SWITCHES IN A PROBLEM WITH SUBLINEAR OSCILLATORY BOUNDARY CONDITIONS, A. Castro and R. Pardo

3. THIN DOMAINS WITH EXTREMELY HIGH OSCILLATORY BOUNDARIES, J́. M. Arrieta and M. C. Pereira

4. FROM NEWTON EQUATION TO FRACTIONAL DIFFUSION AND WAVE EQUATIONS, L. Váquez

5. EL CÁLCULO FRACCIONARIO COMO INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN, L. Váquez and M. P. Velasco